



TITLE:

流体力学における非定常自由表面問題の境界要素解析(境界要素法の数学的理論とその周辺:II)

AUTHOR(S):

中山, 司

CITATION:

中山, 司. 流体力学における非定常自由表面問題の境界要素解析(境界要素法の数学的理論とその周辺:II). 数理解析研究所講究録 1989, 703: 107-121

ISSUE DATE:

1989-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101582>

RIGHT:

流体力学における非定常自由表面問題の境界要素解析

中央大学 理工学部 中山 司 (Tsukasa Nakayama)

1. はじめに

自由表面を有する流体の運動に関する研究は、航空機やロケットの燃料タンク内の液体振動、原子力発電プラントにおける冷却液の振動現象、新素材製造工程における溶融体の界面制御などに関連しており、工学上きわめて重要である。その一方、宇宙空間や磁場空間などの特殊環境での液面運動の特性を把握するという理学的立場からも興味深いテーマである。自由表面の変位が比較的小さい場合には線形理論が有用な解析手段であるが、大振幅の場合には、現象は複雑な非線形初期値境界値問題として定式化される。このため、コンピュータの性能向上とそれに伴う数値解法の進歩によって難解な流れ問題が次々に解き明かされていくなかであって、この自由表面を有する流体の運動はいまだに解析の難しい現象の一つになっている。

これまで有限要素法や差分法を用いた解法が種々提案され、いくつかの自由表面問題において成果を収めているが、一般にこれら領域分割型の手法では境界を移動させるたびに解析領域を再分割しなければならず、複雑なアルゴリズムと多くの計算時間を必要とする。そこで最近では境界要素法が注目されるようになってきている。しかし、これまでに提案された境界要素法を用いた解法の多くでは、方程式の時間積分に対して前進差分のような単純なスキームが用いられており、自由表面の変位が大振幅になるに従って数値計算が不安定になる傾向がある。

そこで、本論文では時間方向に関数のテーラー展開を応用した解法を報告する。本方法によると、テーラー級数を有限項で打ち切ったときの打ち切り誤差を評価することにより、各時点で最適の時間増分を決めることができる。これによって、大振幅の流体運動に対しても安定な数値計算が可能となった。

2. 問題の定式化—2次元造波問題

図1に示すような一定水深の2次元水槽内での造波問題を考える。水槽中央の底には造波用のピストンが設置されている。ピストンの時刻 t における変位を $Y_P(t)$ として、ピストンは関数

$$Y_P(t) = Y_0 \{1 - \exp(-\alpha t)\} \quad t > 0 \text{ に対して} \quad (1)$$

に従って上昇するものとする。

座標系 $o-xy$ は、静止水面に一致させて右向きに x 軸をとり、水槽の中心線に一致させて上向きに y 軸をとる。このとき、流体運動は y 軸に関して左右対称であるから、流体部分の右半分、 $x \geq 0$ を解析対象とする。流体は非粘性、非圧縮、流体内部は非回転流れであるとする、流体の速度成分 (u, v) を用いて、速度ポテンシャル ϕ を $\nabla\phi = (u, v)$ のように定義することができる。これを用いて支配方程式と境界条件は次のように与えられる。

$$\nabla^2\phi = 0 \quad \Omega \text{ 内} \quad (2)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + g\eta = 0 \quad \Gamma_1 \text{ 上} \quad (3)$$

$$u = \frac{D\xi}{Dt}, \quad v = \frac{D\eta}{Dt} \quad \Gamma_1 \text{ 上} \quad (4)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{dY_P}{dt} \quad \Gamma_2 \text{ 上} \quad (5)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_3 \text{ 上} \quad (6)$$

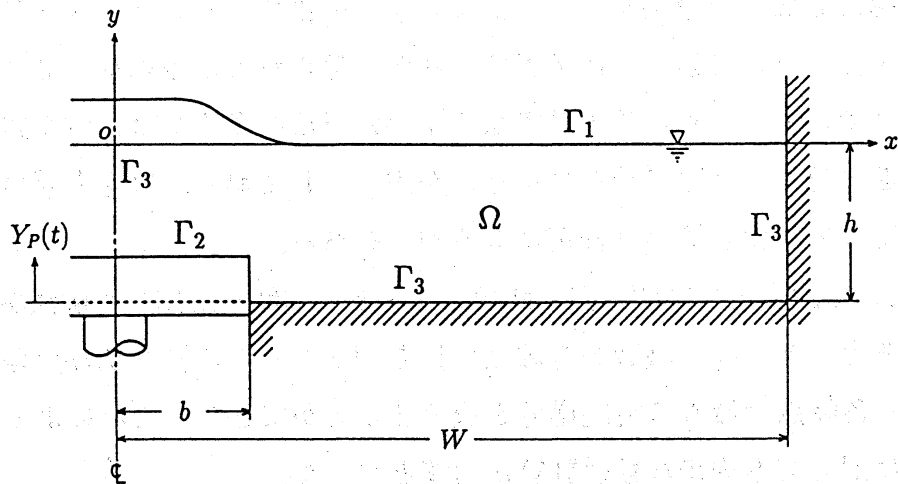


図1 2次元造波水槽

ここに、 Ω は流体内部、 Γ_1 は自由表面境界、 Γ_2 はピストン上面、 Γ_3 はその他の反射境界を表す。 g は重力加速度である。 ∇^2 は2次元ラプラシアン、 D/Dt はラグランジュ微分演算子を表わし、 $\partial/\partial n$ は外向き法線 n に沿って微分することを意味する。 (ξ, η) は自由表面上の流体粒子の座標を表す。本方法では、あらかじめ自由表面上に有限個の粒子を分布させておき、この粒子をラグランジュ的に移動させることによって時々刻々の自由表面形状の変化を追跡する。

時刻 $t=0$ で流体は静止しているものとすれば、初期条件は

$$\xi: \text{既知}, \quad \eta = \phi = 0 \quad (7)$$

で与えられる。

以上より、この造波問題は ξ, η, ϕ を未知量とする非線形初期値境界値問題として定式化された。

3. 解析のアルゴリズム

ある時刻 t から Δt 時間経過後に自由表面の位置が図2のように変化する場合を考えよう。時刻 t の自由表面上で (ξ, η) にあった流体粒子が時刻 $t + \Delta t$ には自由表面上の (ξ', η') に移動し、それにもなつてその流体粒子の位置での速度ポテンシャル値が ϕ から ϕ' に変わったとする。このとき、 ξ', η', ϕ' は (ξ, η, t) を中心としてテーラー級数に展開することができる [1]。このテーラー級数を n 階微分の項で打ち切

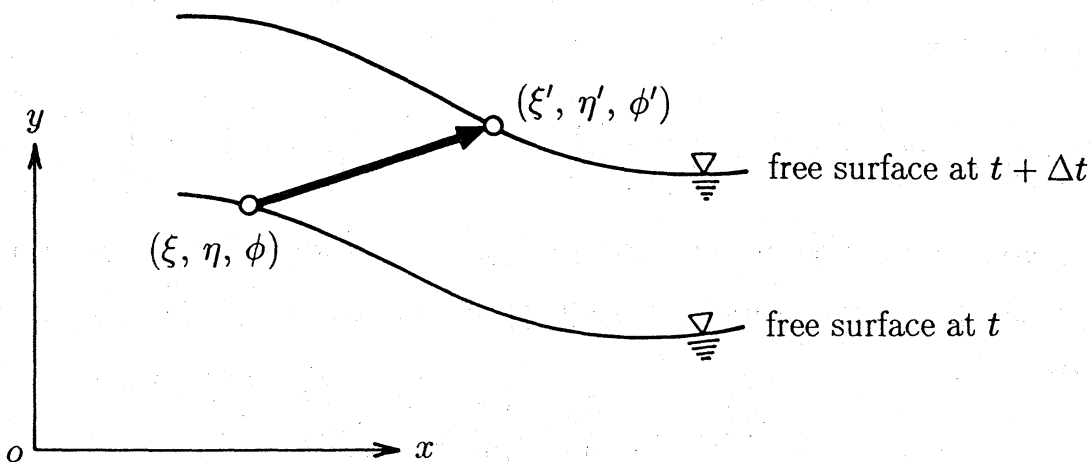


図2 自由表面上の流体粒子の移動

ると, ξ', η', ϕ' は次のように近似される.

$$\xi' \approx \xi + \Delta t \frac{D\xi}{Dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{D^2\xi}{Dt^2} + \cdots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} \frac{D^n\xi}{Dt^n} \quad (8)$$

$$\eta' \approx \eta + \Delta t \frac{D\eta}{Dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{D^2\eta}{Dt^2} + \cdots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} \frac{D^n\eta}{Dt^n} \quad (9)$$

$$\phi' \approx \phi + \Delta t \frac{D\phi}{Dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{D^2\phi}{Dt^2} + \cdots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} \frac{D^n\phi}{Dt^n} \quad (10)$$

そこでテーラー級数の各項を構成するラグランジュ微係数の値を計算することができれば, 時刻 $t + \Delta t$ での自由表面の位置とそこでの速度ポテンシャル値を知ることができる.

3.1 1 階のラグランジュ微係数

最初に, 次の境界値問題を解く.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \Omega \text{ 内} \quad (11)$$

$$\phi = \hat{\phi} \quad \Gamma_1 \text{ 上} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{dY_P}{dt} \quad \Gamma_2 \text{ 上} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_3 \text{ 上} \quad (14)$$

ここで, $\hat{\phi}$ の値は直前の時間ステップで計算されているものとする. この境界値問題を解くために直接境界要素法が用いられる. グリーンの公式を用いると式(11)-(14)は境界積分方程式

$$\alpha_P \phi_P - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \phi}{\partial n} \ln \frac{1}{r} ds + \int_{\Gamma_2} \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) ds = - \int_{\Gamma_1} \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) ds - \int_{\Gamma_2} \frac{dY_P}{dt} \ln \frac{1}{r} ds \quad (15)$$

に変換される. これを解くと自由表面上で $\partial \phi / \partial n$ の値が得られる. 一方, 数値微分 (5 節参照) によって自由表面上での接線方向微係数 $\partial \phi / \partial s$ を計算すれば, たとえば $D\xi/Dt$ は

$$\frac{D\xi}{Dt} = u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial n} n_x - \frac{\partial \phi}{\partial s} n_y \quad (16)$$

で計算することができる。ここに、 n_x, n_y はそれぞれ外向き法線の x 軸, y 軸に対する方向余弦である。 $D\eta/Dt$ についても同様である。こうして求められた u, v の値を用いると、式(3)より

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - g\eta \quad (17)$$

のように $D\phi/Dt$ を計算することができる。

3.2 2階のラグランジュ微係数

たとえば、 $D^2\xi/Dt^2$ は

$$\begin{aligned} \frac{D^2\xi}{Dt^2} &= \frac{Du}{Dt} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \phi_t}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (18)$$

のように表すことができる。ここで $\phi_t = \partial\phi/\partial t$ である。 u の勾配は数値微分によって計算することにすれば、 $D^2\xi/Dt^2$ を求めるためには自由表面上で ϕ_t の勾配を知ることが必要である。そこでこれを以下のようにして計算する。

ラプラス方程式(2)を時間で微分すると、 ϕ_t もまたラプラス方程式を満たさなければならないことがわかる。そこで ϕ_t に関する次のような境界値問題を考える。

$$\nabla^2 \phi_t = 0 \quad \Omega \text{ 内} \quad (19)$$

$$\phi_t = \frac{D\phi}{Dt} - (u^2 + v^2) \quad \Gamma_1 \text{ 上} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial n} = - \left(\frac{d^2 Y_P}{dt^2} + \frac{dY_P}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \Gamma_2 \text{ 上} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_3 \text{ 上} \quad (22)$$

ここで、式(20)の右辺の量はすでに前節で計算されていることに注意されたい。境界条件(21)は、境界条件(13)を時間に関して微分すれば得られる。そのとき、ピストン上面 Γ_2 が移動境界であることを考慮して

$$\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{dY_P}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial y}$$

で定義されるラグランジュ微分をとらなければならない。この境界値問題を境界要素法で解き、自由表面上で $\partial\phi_t/\partial n$ の値を得る。続いて数値微分によって $\partial\phi_t/\partial s$ を計算すれば、たとえば $\partial\phi_t/\partial x$ は

$$\frac{\partial\phi_t}{\partial x} = \frac{\partial\phi_t}{\partial n} n_x - \frac{\partial\phi_t}{\partial s} n_y \quad (23)$$

で与えられる。以上より、式(18)によって $D^2\xi/Dt^2$ の値を計算することができる。 $D^2\eta/Dt^2$ についても同様である。

$D^2\phi/Dt^2$ は、式(3)を時間で微分して得られる式

$$\frac{D^2\phi}{Dt^2} = u \frac{Du}{Dt} + v \frac{Dv}{Dt} - g v \quad (24)$$

で計算することができる。

3.3 高階のラグランジュ微係数

3.2節と同様に、 ϕ_{tt} , ϕ_{ttt} 等に関する境界値問題を解きながら、さらに高階の微係数を計算する。

4. 境界要素法

前節で触れたように、 ϕ , ϕ_t 等に関する境界値問題は境界要素法によって解かれる。境界値問題(11)-(14)を例にとると、境界を多数の直線要素に分割し、各要素内での ϕ と $\partial\phi/\partial n$ の値は一次の形状関数によって近似される。こうして、境界積分方程式(15)は離散化され、境界 Γ_1 上での $\partial\phi/\partial n$ と境界 Γ_2 , Γ_3 上での ϕ を未知量とする連立一次代数方程式に帰着される。

本解法では時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ の状態を求めるときに、 ϕ , ϕ_t 等に関する n 組(ここで n はテーラー級数(8)-(10)の中のラグランジュ微係数の最高階数)のラプラス方程式を解かなければならない。しかし、これらのラプラス方程式を離散化して得られる連立一次代数方程式はすべて同じ係数行列を持つ。したがって、係数行列のLU分解を1度しておけば、同一ステップ内では前進代入と後退代入だけで連立一次方程式を解くことができる。

なおここでは、自由表面境界を離散化したときの節点を、2節で述べた自由表面を表現するための粒子と見なしている。

5. 数値微分

自由表面上に配置された節点の番号を、文字 ζ で代表させるものとする。 ζ は本来自然数値しか取り得ない離散変数であるが、これを形式的に実数値を取る連続変数と見なすことにする。このとき、自由表面上に不等間隔に並んでいた節点は、 ζ 軸上では等間隔（間隔は1）に並ぶことになる（図3）。そこで、 x, y, u, v は ζ の関数と考えることができるから、

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{d\zeta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{d\zeta} \quad (25)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \zeta} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{d\zeta} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{d\zeta} \quad (26)$$

を得る。ここで、連続の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (27)$$

と渦無しの条件

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (28)$$

を利用して $\partial u / \partial y$ と $\partial v / \partial y$ を消去したのち、式(25)と(26)を $\partial u / \partial x$ と $\partial v / \partial x$ について解くと

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{dx}{d\zeta} - \frac{\partial v}{\partial \zeta} \frac{dy}{d\zeta} \right) \quad (29)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{dy}{d\zeta} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} \frac{dx}{d\zeta} \right) \quad (30)$$

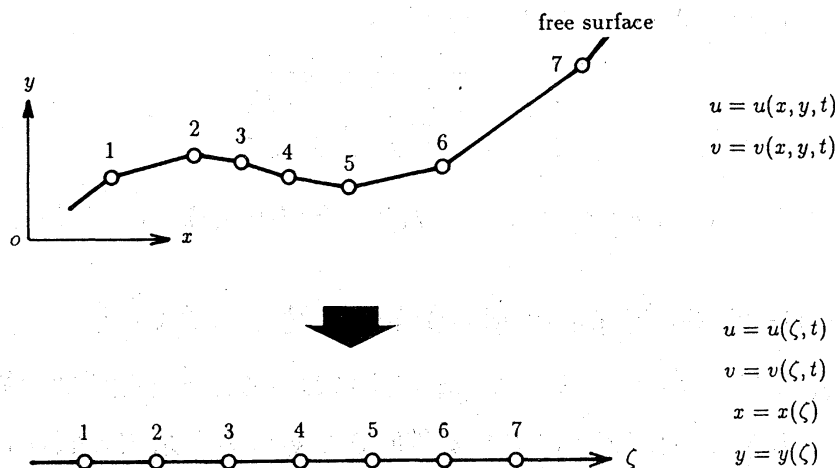


図3 数値微分のための補助変数 ζ の導入

を得る。ここに

$$D = \left(\frac{dx}{d\zeta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta} \right)^2 \quad (31)$$

である。したがって、 ζ に関する x, y, u, v の微係数が計算できれば u, v の空間微係数を求めることができる。 ζ 軸上で節点は等間隔に並んでいるから、数値微分のための公式の導出は容易である。本方法では次の4次精度の差分公式を用いている[2]。

$$f'(\zeta) = \frac{f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2}{12h} + O(h^4) \quad (32)$$

ここに

$$f_{\pm k} = f(\zeta \pm kh) \quad (k = 1, 2) \quad (33)$$

である。 h は ζ 軸上での節点間の距離で、 $h = 1$ である。また着目する節点が、たとえば自由表面境界の左端の点である場合には、次の後退差分式を用いる。

$$f'(\zeta) = \frac{25f_0 - 48f_{-1} + 36f_{-2} - 16f_{-3} + 3f_{-4}}{12h} + O(h^4) \quad (34)$$

$$f_{-k} = f(\zeta - kh) \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (35)$$

ただし、境界に沿って反時計まわりに節点の番号付けを行うものとする。また、右端の節点に対しては上式に準ずる前進差分公式を用いる。

速度ポテンシャル ϕ の接線方向微係数 $\partial\phi/\partial s$ も同様に計算できる[3]。これは

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta} \right) / \left(\frac{ds}{d\zeta} \right) \quad (36)$$

のように表すことができる。さらに $ds/d\zeta$ は

$$\frac{ds}{d\zeta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta} \right)^2} \quad (37)$$

と書ける。したがって、 $\partial\phi/\partial\zeta$ を計算すれば、 $\partial\phi/\partial s$ を知ることができる。

6. 外向き法線の方法余弦の節点値について

3節での説明より明らかなように、本方法においては各種微係数の算定が重要であるが、そのときに式(16), (23)に現れる外向き法線の方法余弦の値は計算された微係数値の精度を左右する重要な因子のひとつである。この方向余弦については節点での

値が必要であるため、その算定に当たっては慎重な取り扱いが要求される。そこで本論文では、流体の質量保存則に基づいた算定方法〔4〕を検討してみる。

連続の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Omega \text{ 内} \quad (38)$$

は、ガウスの発散定理を用いると

$$\int_{\Gamma} (u n_x + v n_y) d\Gamma = 0 \quad (39)$$

のように表すことができる。ここに、 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ である。節点 i に対する形状関数を N_i 、節点流速を (u_i, v_i) とすれば、

$$u = \sum_{i=1}^M u_i N_i, \quad v = \sum_{i=1}^M v_i N_i \quad (40)$$

と書ける。ここに M は境界上の総節点数である。式(40)を式(39)に代入すると

$$\sum_{i=1}^M \left(u_i \int_{\Gamma} N_i n_x^e d\Gamma + v_i \int_{\Gamma} N_i n_y^e d\Gamma \right) = 0 \quad (41)$$

となる。ここで、方向余弦 n_x, n_y は境界要素上に立てた外向き法線方向の方向余弦と考え、上付き添字 e を付けることにする。

さて、節点 i における流速の法線方向成分 V_{n_i} と接線方向成分 V_{s_i} を用いて、方向余弦の節点値 n_{x_i}, n_{y_i} を

$$u_i = V_{n_i} n_{x_i} - V_{s_i} n_{y_i} \quad (42)$$

$$v_i = V_{s_i} n_{x_i} + V_{n_i} n_{y_i} \quad (43)$$

で定義する。これらを、式(41)に代入して整理すると、次式を得る。

$$\sum_{i=1}^M \left\{ \left(n_{x_i} \int_{\Gamma} N_i n_x^e d\Gamma + n_{y_i} \int_{\Gamma} N_i n_y^e d\Gamma \right) V_{n_i} + \left(n_{x_i} \int_{\Gamma} N_i n_y^e d\Gamma - n_{y_i} \int_{\Gamma} N_i n_x^e d\Gamma \right) V_{s_i} \right\} = 0 \quad (44)$$

ところで、式(39)は Γ 上の接線方向流速には影響されないはずであるから、上式の V_{s_i} の係数は恒等的に 0 でなければならない。すなわち

$$n_{x_i} \int_{\Gamma} N_i n_y^e d\Gamma - n_{y_i} \int_{\Gamma} N_i n_x^e d\Gamma = 0 \quad (45)$$

である。一方,

$$(n_{x_i})^2 + (n_{y_i})^2 = 1 \quad (46)$$

であるから, 式(45)と(46)より, n_{x_i} と n_{y_i} が次のように求められる。

$$n_{x_i} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad n_{y_i} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (47)$$

ここに

$$A = \int_{\Gamma} N_i n_x^e d\Gamma, \quad B = \int_{\Gamma} N_i n_y^e d\Gamma \quad (48)$$

である。本解法で採用している線形要素について A, B を計算すると

$$A = \frac{1}{2}(\ell^a n_x^a + \ell^b n_x^b), \quad B = \frac{1}{2}(\ell^a n_y^a + \ell^b n_y^b) \quad (49)$$

となる。ここに, ℓ は境界要素の長さを表し, 上付き添字 a, b は節点 i を共有する 2 要素 a, b における値であることを意味する。式(47), (49) で計算される方向余弦を持つ法線の向きは, 要素 a, b を 2 辺にもつ三角形の残りの 1 辺に立てた垂線の向きに一致する。

7. 最適時間増分の算定

本方法では, 各時間ステップ毎に最適の時間増分値を計算することができる。ある時間の関数 $f(t)$ のテーラー級数は

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t f'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} f''(t) + \dots \quad (50)$$

で与えられる。これを n 階の微係数を含む項で打ち切ると, そのときの打ち切り誤差は

$$\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\tau) \quad t \leq \tau \leq t + \Delta t \quad (51)$$

で与えられる。そこで, この打ち切り誤差があらかじめ与えられた微小量 ε に等しくなるように時間増分 Δt の大きさが決定される。すなわち

$$\Delta t = \sqrt[n+1]{\frac{\varepsilon(n+1)!}{f^{(n+1)}(\tau)}} \quad (52)$$

である。これを式(8)-(10)に適用するときには, $f^{(n+1)}(\tau)$ の項に対して次のような値を近似的に用いる。

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \left| \left(\frac{D^{n+1} \xi}{Dt^{n+1}} \right)_i \right|, \left| \left(\frac{D^{n+1} \eta}{Dt^{n+1}} \right)_i \right|, \left| \left(\frac{D^{n+1} \phi}{Dt^{n+1}} \right)_i \right| \right\}$$

ここで m は自由表面上の節点数である。これらの $(n+1)$ 階ラグランジュ微係数は時刻 t におけるものであり、 n 階のラグランジュ微係数を用いて後退時間差分で計算する。ただし時刻 $t=0$ のステップだけは、 $(n+1)$ 階微係数を n 階微係数で置き換えて計算するものとする。

8. 計算結果

本方法による計算結果の精度の検証のために実験データとの比較を試みる。水槽の半幅 W を $W/h = 50.0$ とし、ピストンの半幅 b を $b/h = 12.2$ とする。自由表面境界を長さの等しい 50 要素に分割し、総要素数は 97 である。テーラー級数 (8)-(10) において $n=3$ とし、時間増分 Δt を決めるための許容誤差 ϵ は 10^{-5} とする。ピストンの運動を決めるパラメータは、

$$Y_0/h = 0.1, \quad \alpha\sqrt{h/g} = 0.231$$

とする。

図 4 に、 $x=0$ における自由表面変位の時間変化を示す。横軸は無次元時刻、縦軸は無次元変位を表す。○印は本方法による計算値を示し、実線は Hammack [5] によって得られた実験値である。破線は Hammack による線形理論解である。計算値と実験値との一致は良好である。

自由表面上の粒子（節点）の移動は原則として式 (8) と (9) によるが、自由表面と反射境界 (Γ_3) の交点に位置する節点（すなわち、自由表面の両端の節点）に対しては、

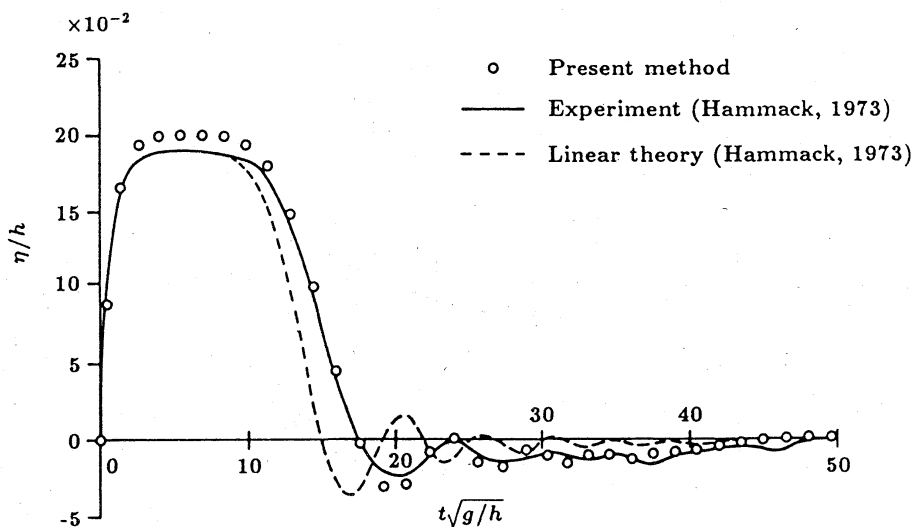


図 4 $x=0$ における自由表面変位の時間変化

その節点が常に Γ_3 上に位置するよう、その移動に拘束を課している。しかし、この節点における速度ベクトルを調べてみると、節点が境界 Γ_3 から離脱しようとする傾向は見られない。したがってこのような拘束を課しても、問題となるほどの計算精度の劣化は観測されなかった。

9. 液体スロッシングの数値シミュレーション

本方法を、水平加振を受ける2次元容器内の液体スロッシングのシミュレーションへ応用する。図6に示す円形断面の容器を考える。座標系 $o-xy$ は容器に固定され、容器と共に運動する動座標系とし、静止水面に一致させて x 軸をとり、鉛直上向きに y 軸をとる。液体の容器に対する相対速度を用いて定義される速度ポテンシャル ϕ を用いて支配方程式と境界条件を書くと、次のようになる。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \Omega \text{ 内} \quad (53)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + a(t)\xi + g\eta = 0 \quad \Gamma_1 \text{ 上} \quad (54)$$

$$u = \frac{D\xi}{Dt}, \quad v = \frac{D\eta}{Dt} \quad \Gamma_1 \text{ 上} \quad (55)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_2 \text{ 上} \quad (56)$$

ここに、 Ω は流体内部、 Γ_1, Γ_2 はそれぞれ自由表面境界と流体に接する容器壁境界を表す。 $a(t)$ は容器に加えられる水平加振加速度である。計算に当たり、容器の直径を

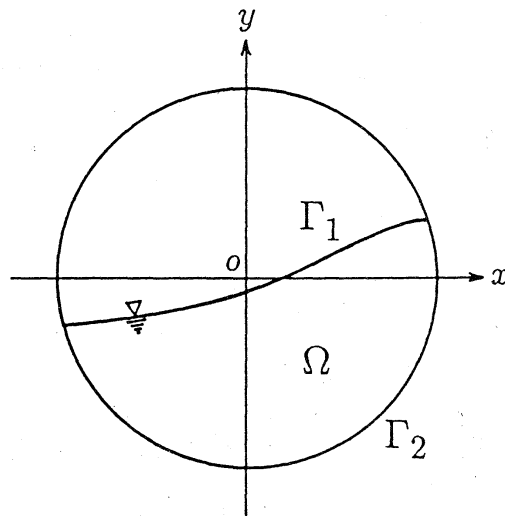


図5 容器内の自由表面を有する液体の非定常運動

1 m とし、容器の半分を液体で満たす。そして、自由表面境界と容器壁境界をそれぞれ 40 要素に分割する。このような系に対して、加振加速度

$$a(t) = -A \sin(\omega t) \quad t \geq 0 \quad (57)$$

を与える。ここで振幅 A 、振動数 ω は、 $A/g = 0.025$, $\omega = 5.0 \text{ rad/s}$ とする。

図 7 に各時刻の自由表面形状を示す。これを見ると、自由表面の傾斜が大きくなるにしたがって容器壁付近にリップル (ripple) と呼ばれる突出部分ができていくのがわかる。このようなリップルは、矩形容器や、円形容器でも水深が浅い場合には発生しない。この計算例での時間増分の平均値は約 0.003 秒であった。計算に要する時間は、東京大学大型計算機センターの M-680 を用いて 500 時間ステップあたり 1 分 57 秒であった。

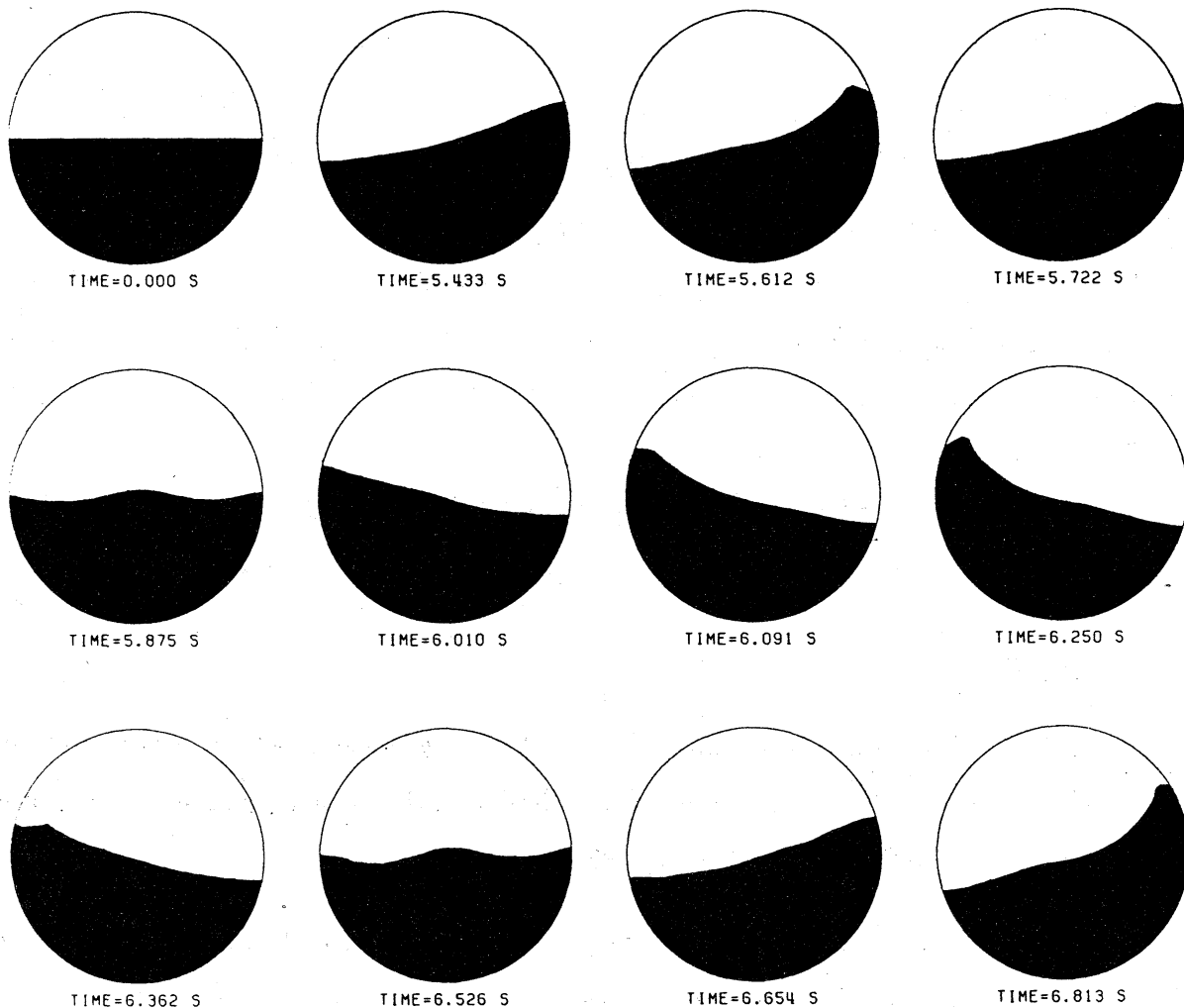


図 6 2次元円形容器内の液体スロッシング

本解法では自由表面上の節点はその位置の流速に従ってラグランジュ的に移動される。本解法に限らず、一般にラグランジュ的な節点の移動を行う手法では、現象の変化の急な部分に節点が集まる傾向がある。たとえば有限要素法などでは、このような節点の集中によって要素がつぶれることがある。そこでリゾーニング (rezoning) と呼ばれる領域の再分割が行われる。さて、本解法による計算でもリップル付近に節点が集まる傾向が見られる。この結果、リップル付近の境界要素の長さは極端に短くなり、計算精度が悪化し、数値計算の破綻が引き起こされる。そこで本解法ではその対応策として、自由表面上の要素の長さの最小値と最大値の比が0.3以下になったときに自由表面上の全節点を等間隔に配置し直している。これを筆者は、リロケーション (relocation) と呼んでいる。節点の新しい位置での ϕ の値は、再配置前の節点分布から内挿によって求めている。このリロケーションによって計算の破綻は回避することができた。

10. おわりに

液体自由表面の大振幅運動に対する数値解法を報告した。時間に関する離散化に関するテーラー展開を応用し、精度の良い非定常計算を可能にした。さらに、テーラー級数の打ち切り誤差を評価することによって、時間増分の大きさを可変にすることができ、安定な数値計算を実現した。一般に自由表面問題では、自由表面上での非線形境界条件 (3) の離散化には慎重な取扱いが要求されるが、本解法の手扱いは非常に簡単である。

なお本研究は、昭和63年度文部省科学研究費補助金 (奨励研究 (A) 63750175) の助成を受けて行われたものである。

参考文献

1. Dold, J. W. and Peregrine, D. H., 'Steep unsteady water waves: an efficient computational scheme', Proc. Nineteenth Coastal Engineering Conference, Houston, Texas, 1984, pp. 955-967.
2. Gerald, C. F. and Wheatley, P. O., *Applied Numerical Analysis*, Third edition, Addison-Wesley Publishing Co., 1984.

3. Longuet-Higgins, M. S. and Cokelet, E. D., 'The deformation of steep surface waves on water - I. A numerical method of computation', Proceedings of the Royal Society of London, Vol. A 350, pp. 1-26 (1976).
4. Engelman, M. S., Sani, R. L. and Gresho, P. M., 'The implementation of normal and/or tangential boundary conditions in finite element codes for incompressible fluid flow', International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 2, pp. 225-238 (1982).
5. Hammack, J. L., 'A note on tsunamis: their generation and propagation in an ocean of uniform depth', Journal of Fluid Mechanics, Vol. 60, Part 4, pp. 769-799 (1973).
6. Nakayama, T. 'A computing method for simulating unsteady free surface motions of an incompressible, inviscid fluid', submitted to International Journal for Numerical Methods in Fluids.